自然数幂和通项公式证明的新方法

黄　婷，车茂林，彭　杰，张　莉*

（内江师范学院 数学与信息科学学院，四川　内江　641100）

摘　要：针对自然数幂和问题，利用多项式和矩阵理论，得到了一种计算自然数幂和通项公式的方法，给出了该方法的具体推导过程. 此方法的优点是将自然数幂和问题转换为了线性方程组求解问题，更浅显易懂.

关键词：自然数幂和；多项式；高斯-约当法；矩阵论

中图分类号：O175　　文献标志码：A　　文章编号：1671－1785(2011)08－0027－03

0　引言

自然数幂和的探究是一个历史悠久的古老的数学问题. 自从古希腊数学家阿基米德研究以来，一直是许多中外数学家、学者研究的热点，并得到了许多有益的结果. Boyer[1]借助于帕斯卡矩阵得到了自然数幂和的通项公式，并且给出了通项公式中各系数之间的关系；Guo 等[2]. 建立了关于自然数幂和的递推算法；Macdonald[3]讨论了对称多项式，并且给出了自然数幂和与对称多项式之间的联系；Yang[4]给出了自然数幂和的通项公式以及系数与伯努利数之间的关系. 著名数学家陈景润等[5]对自然数幂和进行了大量的研究，得到了前 30 个幂和公式. 马建荣等[6]运用了定积分给出 x^m 的求和多项式，研究了该多项式的性质，得到自然数幂和的定积分算法；杨志强[7]通过逐差法，并利用函数 x^m 的牛顿插值公式和组合恒等式得到了自然数幂和的部分和公式；汪晓勤等[8]使用杨辉三角（帕斯卡三角），通过不完全归纳得到自然数幂和通项公式；李卫高等[9]利用阿贝尔变换[10]，建立一个降幂公式，达到了使高次幂求和转化为低次幂求和的目的，得到了自然数幂和的递归算法. 本文利用多项式根与系数的关系，将自然数幂和问题转换为线性方程组求解问题；利用线性方程组根的存在唯一性，建立了关于自然数幂和通项公式的另一种计算方法.

1　主要引理及推论

引理 1.1[11]　设 $k \in \mathbf{N}_+$，则序列 $\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)\}$ 的前 n 项和为

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+k) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k+1)}{k+2}. \quad (1)$$

引理 1.2[12]　设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$，在复数域 $\mathbb{C}$ 上有 n 个根 $\alpha_i (i = 1,2,\cdots,n)$，那么 a_i 与 α_i 之间有如下的关系式

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),\\
a_2 &= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n),\\
a_3 &= -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),\\
&\ \ \vdots\\
a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n),\\
a_n &= (-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

推论 1.1　若令 $\beta_i = -\alpha_i$，则由(2)可以得到 a_i 与 β_i 之间的关系式

收稿日期：2011-05-19

基金项目：四川省教育厅青年基金(08zb046)，内江师范学院大学生科研项目(10NSD－215)

作者简介：黄婷(1989－)，女，四川内江人，内江师范学院学生.

*通讯作者：张莉(1981－)，女，四川眉山人，内江师范学院讲师，硕士. 主要从事最优化理论及其算法研究.

$$\left.\begin{aligned}a_1 &= (\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n),\\ a_2 &= (\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\cdots+\beta_{n-1}\beta_n),\\ a_3 &= (\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_2\beta_4+\cdots+\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n),\\ &\vdots\\ a_{n-1} &= (\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-1}+\cdots+\beta_2\beta_3\cdots\beta_n),\\ a_n &= \beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-1}\beta_n.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

2 主要结论

引理 2.1 设 $g(x)=x(x+1)\cdots(x+k-1)=a_{k,k}x^k+a_{k,k-1}x^{k-1}+\cdots+a_{k,1}x+a_{k,0}$，则有

1) $a_{k,k}=1, a_{k0}=0$；

2) 该多项式的其它系数满足下列等式

$$\left.\begin{aligned}a_{k,k-1} &= 0+1+2+\cdots+(k-1),\\ a_{k,k-2} &= 1\times2+1\times3+\cdots+(k-2)(k-1),\\ &\vdots\\ a_{k,1} &= 1\times2\times\cdots\times(k-1).\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

证明 当 $k=1$ 时，结论显然成立.

假设 $k=m$ 时，结论成立，即有

1) $a_{m,m}=1, a_{m,0}=0$；

2) 有下式成立

$$\left.\begin{aligned}a_{m,m-1} &= 0+1+2+\cdots+(m-1),\\ a_{m,m-2} &= 1\times2+1\times3+\cdots+(m-2)(m-1),\\ &\vdots\\ a_{m,1} &= 1\times2\times\cdots\times(m-1).\end{aligned}\right\}$$

当 $k=m+1$ 时

$$\begin{gathered}g(x)=x(x+1)\cdots(x+m-1)(x+m)=\\ (a_{m,m}x^m+a_{m,m-1}x^{m-1}+\cdots+a_{m,1}x+\\ a_{m,0})(x+m)=\\ a_{m,m}x^{m+1}+(a_{m,m-1}+a_{m,m}m)x^m+\cdots+(a_{m,0}+\\ a_{m,1}m)x+a_{m,0}m.\end{gathered}$$

在上述等式中，$a_{m+1,m+1}=a_{m,m}, a_{m+1,0}=a_{m,0}$，$a_{m+1,j+1}=a_{m,j}+a_{m,j+1}m\ (j=0,1,\cdots,m-1)$.

根据上述假设可得

1) $a_{m+1,m+1}=1, a_{m+1,0}=0$；

2) 有下式成立

$$\left.\begin{aligned}a_{m+1,m} &= 0+1+2+\cdots+m,\\ a_{m+1,m-1} &= 1\times2+1\times3+\cdots+(m-1)m,\\ &\vdots\\ a_{m+1,1} &= 1\times2\times\cdots\times(m-1)\times m.\end{aligned}\right\}$$

综上，引理 2.1 成立，证毕.

定理 2.1 对于任意 $k\in\mathbf{N}_+$，设

$$X=\left(\sum_{i=1}^n i,\sum_{i=1}^n i^2,\cdots,\sum_{i=1}^n i^k\right)^{\mathrm T},$$

$$G=\left(\sum_{i=1}^n\prod_{j=0}^{1-1}(i+j),\sum_{i=1}^n\prod_{j=0}^{2-1}(i+j),\cdots,\sum_{i=1}^n\prod_{j=0}^{k-1}(i+j)\right)^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\ a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{k1}&a_{k2}&a_{k3}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix}.$$

若 $\dim\boldsymbol{A}=k$，则设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$，由引理 1.1，得 $X=BC$，其中

$$C=\left(\frac{\prod_{j=0}^{1}(n+j)}{2},\frac{\prod_{j=0}^{2}(n+j)}{3},\frac{\prod_{j=0}^{3}(n+j)}{4},\cdots,\frac{\prod_{j=0}^{k}(n+j)}{k+1}\right)^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&0&0&\cdots&0\\ b_{21}&b_{22}&0&\cdots&0\\ b_{31}&b_{32}&b_{33}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ b_{k1}&b_{k2}&b_{k3}&\cdots&b_{kk}\end{pmatrix}.$$

证明 对于任意 $k\in\mathbf{N}_+$，设 $m=1,2,\cdots,k$ 在引理 2.1 中，令 $x=i\ (i=1,2,\cdots,n)$，求得 $g(i)$ 的值如下.

$$\left.\begin{aligned}g(1) &= a_{m,m}1^m+a_{m,m-1}1^{m-1}+\cdots+a_{m,1}1+a_{m,0},\\ g(2) &= a_{m,m}2^m+a_{m,m-1}2^{m-1}+\cdots+a_{m,1}2+a_{m,0},\\ g(3) &= a_{m,m}3^m+a_{m,m-1}3^{m-1}+\cdots+a_{m,1}3+a_{m,0},\\ &\vdots\\ g(n) &= a_{m,m}n^m+a_{m,m-1}n^{m-1}+\cdots+a_{m,1}n+a_{m,0}.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

将方程组(5)中的 n 个方程求和得

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^n i(i+1)\cdots(i+m-1)=\\ a_{m,m}\sum_{i=1}^n i^m+a_{m,m-1}\sum_{i=1}^n i^{m-1}+\cdots+a_{m,1}\sum_{i=1}^n i.\end{gathered} \quad (6)$$

在方程组(6)中令 $m=1,2,\cdots,k$，可以得到如下方程.

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{1-1}(i+j) \\ \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{2-1}(i+j) \\ \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{3-1}(i+j) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{k-1}(i+j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} i \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} i^3 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} i^k \end{pmatrix}. \quad (7)$$

在方程(7)中，令

$$X = \left(\sum_{i=1}^{n} i, \sum_{i=1}^{n} i^2, \cdots, \sum_{i=1}^{n} i^k\right)^{\mathrm{T}},$$

$$G = \left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{1-1}(i+j), \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{2-1}(i+j), \cdots, \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{k-1}(i+j)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

则方程(7)可以简化为

$$\boldsymbol{A}X = G. \quad (8)$$

而由引理 2.1 可知，$a_{mm} = 1 (m = 1, 2, \cdots, k)$，则 $\det(A) = 1 > 0$，故 $\dim A = k$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，从而方程(8)有唯一解.

设 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则方程(8)的解为

$$X = \boldsymbol{A}^{-1}G = \boldsymbol{B}G. \quad (9)$$

同时利用引理 1.1 有

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{m-1}(i+j) = \frac{\prod_{j=0}^{m}(n+j)}{m+1} (m = 1, 2, \cdots, k),$$

所以 $b = c$，将其代入(9)式，可得

$$X = \boldsymbol{B}C.$$

从而定理得证，证毕.

定理 2.2　在定理 2.1 成立的条件下，对于任意 $k \in \mathbf{N}_+$，有下列式子成立.

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = b_{k1}\frac{\prod_{j=0}^{1}(n+j)}{2} + b_{k2}\frac{\prod_{j=0}^{2}(n+j)}{3} + b_{k3}\frac{\prod_{j=0}^{3}(n+j)}{4} + \cdots + b_{kk}\frac{\prod_{j=0}^{k}(n+j)}{k+1}.$$

证明　根据定理 2.1 可以得到

$$X = \boldsymbol{B}C.$$

根据向量相等的条件和矩阵乘法的相关知识可得

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = b_{k1}\frac{\prod_{j=0}^{1}(n+j)}{2} + b_{k2}\frac{\prod_{j=0}^{2}(n+j)}{3} + b_{k3}\frac{\prod_{j=0}^{3}(n+j)}{4} + \cdots + b_{kk}\frac{\prod_{j=0}^{k}(n+j)}{k+1}.$$

从而定理得证.

本文通过利用多项式根与系数的关系，将自然数幂和问题转化为线性方程组的求解问题，更浅显易懂.

参考文献：

[1] Boyer C B. Pascal's formula for the sums of powers of the integers [J]. Scripta Mathematical, 1943, 9: 237-244.

[2] Guo S L, Qi F. Recursion Formula for $\sum_{k=1}^{n} m^k$ [J]. Z Anal Anwendungen, 1999, 18: 1123-1130.

[3] Macdonald I G. Symmetric functions and hall polynomials(second edition) [M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.

[4] 杨必成. 联系 Bernouli 为自然数同次幂和的公式 [J]. 数学的实践与认识，1994，24(4)：52-56..

[5] 陈景润，黎鉴愚. 在 $S_k(n)$ 上的新结论 [J]. 科学通报：英文版，1986，31(6)：361-362.

[6] 马建荣，刘三阳，刘红卫. 自然数幂和的定积分算法 [J]. 高等数学研究，2009，12(6)：33-36.

[7] 杨志强. 用逐差法求解自然数方幂之和 [J]. 数学实践与认识，2003，33(11)：136-137.

[8] 汪晓勤，周崇林. 自然数幂和的矩阵算法 [J]. 高等数学研究，2004，7(2)：35-37.

[9] 李卫高. 阿贝尔变换在求幂和中的应用 [J]. 高等数学研究，2009，12(1)：76-77.

[10] 华东师范大学数学系. 数学分析 [M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2001.

[11] Richard Courant. Fritz john. Introduction to calculus and analysis [M]. 北京：世界图书出版社，2008.

[12] 张禾瑞，郝鈵新. 高等代数 [M]. 5 版. 北京：高等代数教育出版社，2007.

（下转第 32 页）

[8] Miao Y. Central limit theorem and almost sure central limit theorem for the product of some partial sums [J]. Proceedings of the Indian Academy of Sciences-mathematical Sciences, 2008, 118(4): 289-294.

[9] 陈文英, 王学平. 概率空间上较优的 Poincaré不等式 [J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2009,32(5): 569-571.

[10] 俞泽鹏. 时间序列中一种模型的最优预测的研究 [J]. 内江师范学院学报,2009,24(8):37-40

[11] 李云飞. 指数分布多个异常数据的检验 [J]. 内江师范学院学报,2008,23(4):17-19.

On the Law of the Iterated Logarithm for Some Product of Sums

ZHAO Yang

(Nanbai Campus, Zunyi Normal College, Zunyi, Guizhou 563100, China)

Abstract: A certain law of the iterated logarithm for properly normalized product of the partial sums for a sequence of independent and identically distributed positive random variables was proved, which enriches the field of probability limit theory.

Key words: product of partial sums; law of the iterated logarithm; central limit theorem

(责任编辑:胡　蓉)

(上接第 29 页)

New Method for Proving General Term Formula of a Natural Number's Power Sum

HUANG Ting,CHE Mao-lin, PENG Jie,ZHANG Li

(College of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang, Sichuan 641100, China)

Abstract: Based on the polynomial and matrix theory, a new method for calculating the general term formula of a natural number's power sum is obtained, with its specific deducing process given in detail. The said mehtod boasts of its clever transformation of natural power sum problems into problems of finding solutions to linear equations and is easy and clear to understand.

Key words: power sum of natural numbers; polynomial; Gauss-Jordan elimination method; matrix theory

(责任编辑:胡　蓉)